COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

1. Introducción

La teoría de composición de movimientos de sólidos permite determinar el movimiento de un cierto sólido S_2 respecto de otro sólido de referencia S_1 (S_2/S_1) utilizando otro sistema o sólido intermedio S_O de forma que permita determinar dicho movimiento (S_2/S_1) mediante los movimientos de S_2 con respecto de S_O (S_2/S_O) y de S_O con respecto de S_1 (S_O/S_1).

Lógicamente, tiene sentido utilizar este procedimiento cuando los movimientos de S_2/S_O y S_O/S_1 son conocidos o bien son más fáciles de calcular que el de S_2/S_1. Al movimiento de S_2/S_O se le denomina *movimiento relativo*, al de S_O/S_1 *movimiento de arrastre* y al de S_2/S_1 *movimiento absoluto*.

Dado el carácter relativo en sí de cualquier movimiento[1], conviene señalar que el convenio establecido para designar los movimientos absoluto, relativo y arrastre no establece ninguna condición de privilegio o propiedad especial atribuíble a cada uno de ellos. En realidad, la teoría de composición de movimientos permite hallar uno cualquiera de los tres movimientos conocidos los otros dos, lo que permite permutar los conceptos[2].

Sea M un punto del sólido S_2 y $OX_0Y_0Z_0$, $O_1X_1Y_1Z_1$ los sistemas de referencia ligados respectivamente a los sólidos S_O y S_1 (Figura 1). Como el movimiento de un sólido respecto de un sistema de referencia queda definido por la velocidad de un punto de él y por su velocidad angular, de acuerdo con lo expuesto se suponen conocidas:

- Movimiento relativo (S_2/S_O):

[1] Como se ha comentado al comienzo del estudio de la cinemática, el concepto de movimiento está íntimamente ligado al sistema de referencia del mismo.

[2] Bastaría que hubiese que estudiar el movimiento de S_2/S_O utilizando como sistema intermedio S_1 para que el anterior movimiento absoluto pasase a relativo y el relativo a absoluto.

$$\vec{v}_{20}^{M} = \left.\frac{d\overline{OM}}{dt}\right|_{S_0} \; ; \; \vec{\omega}_{20} \text{ y sus derivadas } \vec{a}_{20}^{M} = \left.\frac{d\vec{v}_{20}^{M}}{dt}\right|_{S_0} \; ; \; \vec{\alpha}_{20} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt}\right|_{S_0}$$

- Movimiento de arrastre (S_0/S_1):

  $\vec{v}_{01}^{M}$; $\vec{\omega}_{01}$ y sus derivadas; $\vec{a}_{01}^{M} = \left.\frac{d\vec{v}_{01}^{M}}{dt}\right|_{S_1}$; $\vec{\alpha}_{01} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt}\right|_{S_1}$, considerando ahora el punto M como perteneciente a S_0, es decir, el punto de S_0 coincidente con M[3].

Para determinar el movimiento absoluto (S_2/S_1) es necesario conocer $\vec{v}_{21}^{M} = \left.\frac{d\overline{O_1M}}{dt}\right|_{S_1}$ y $\vec{\omega}_{21}$, siendo las aceleraciones $\vec{a}_{21}^{M} = \left.\frac{d\vec{v}_{21}^{M}}{dt}\right|_{S_1}$; $\vec{\alpha}_{21} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt}\right|_{S_1}$

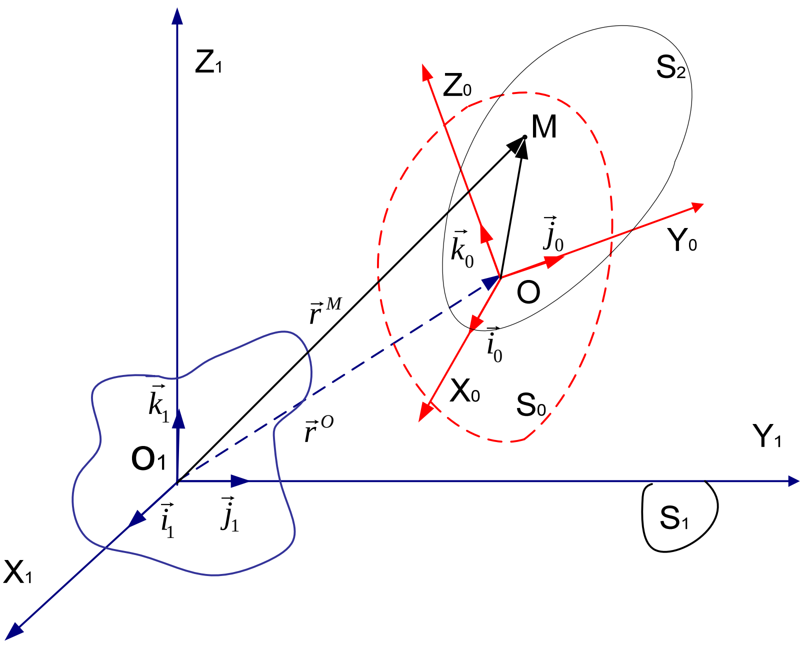

Figura 1: Composición de movimientos

2. Composición de velocidades

Siguiendo con el apartado anterior, para el punto M del sólido S_2 se verifica en cualquier instante que

$$\overline{O_1M} = \overline{O_1O} + \overline{OM} \quad \text{(CM\_1)}$$

[3] Recordad que un punto geométrico puede tener distintas velocidades dependiendo de a qué sólido o sistema se considera que pertenece y de cuál es el sistema de referencia del movimiento que se considera.

Y, por definición, la velocidad absoluta es la derivada con respecto al tiempo en el sistema S_1 de dicha expresión

$$\vec{v}_{21}^{M} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}\right)\right)_{S_1} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1O}\Big)_{S_1} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\Big)_{S_1}$$

Pero como $\left.\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}\right)_{S_1} = \vec{v}_{01}^{O}$ y $\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right)_{S_1} = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right)_{S_0} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM}$, con $\vec{v}_{20}^{M} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{S_0}$,

sustituyendo resulta

$$\vec{v}_{21}^{M} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}\right)_{S_1}}_{\vec{v}_{01}^{O}} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{S_0}}_{\vec{v}_{20}^{M}} = \vec{v}_{01}^{O} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{v}_{20}^{M} \quad \text{(CM\_2)}$$

Analizando el miembro derecho de esta última ecuación, los dos primeros sumandos coinciden con la expresión del campo de velocidades que nos facilitaría la velocidad $\vec{v}_{01}^{M}$. Nótese que estamos hablando del movimiento del punto M ya no como perteneciente al sólido S_2, si no como perteneciente al sólido S_0. Ahora, el movimiento S_O/S_1 de los puntos del sólido S_2 consistirá en ligar el sólido S_2 al sólido S_0, dando lugar al movimiento de arrastre con respecto a la referencia S_1. Esta forma de interpretar la ecuación anterior permite reescribir de forma muy sencilla la composición de velocidades del punto de un sólido.

$$\boxed{\vec{v}_{21}^{M} = \vec{v}_{01}^{M} + \vec{v}_{20}^{M}} \quad \text{(CM\_4)}$$

A modo de resumen, la *velocidad absoluta* ($\vec{v}_{21}^{M}$) es la suma de la *velocidad relativa* ($\vec{v}_{20}^{M}$) y de la *velocidad de arrastre* ($\vec{v}_{01}^{M}$). Siendo

- $\vec{v}_{21}^{M}$, la velocidad que tiene el punto M del sólido S_2 con respecto de un observador ligado al sólido S_1. Velocidad absoluta del punto del punto M
- $\vec{v}_{20}^{M}$, la velocidad que tiene el punto M del sólido S_2 con respecto de un observador ligado al sólido S_0. Velocidad relativa del punto M
- $\vec{v}_{01}^{M}$, la velocidad que tiene el punto M, ahora considerado del sólido S_0 con respecto de un observador ligado al sólido S_1. Velocidad de arrastre del punto M. Nótese que este movimento es fruto de la interpretación realizada de las ecuaciones

Para obtener la expresión de la composición de velocidades angulares se considera otro punto P del sólido S_2 . Análogamente al punto M, el punto P también ha de verificar

$$\vec{v}_{21}^{P} = \vec{v}_{01}^{P} + \vec{v}_{20}^{P} \quad \text{(CM\_5)}$$

Pero entre los puntos M y P considerados como pertenecientes al sólido S_2 o al conjunto S_2 S_0 , de acuerdo con el campo de velocidades de un sólido, también se cumplen las relaciones

- $\vec{v}_{21}^{M} = \vec{v}_{21}^{P} + \vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{PM}$ (CM_6) en el movimiento de S_2/S_1
- $\vec{v}_{20}^{M} = \vec{v}_{20}^{P} + \vec{\omega}_{20} \wedge \overrightarrow{PM}$ (CM_7) en el movimiento de S_2/S_0
- $\vec{v}_{01}^{M} = \vec{v}_{01}^{P} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{PM}$ (CM_8) en el movimiento de S_0/S_1

Igualando (CM_4) con (CM_6), sustituyendo (CM_7), (CM_8), (CM_5) y agrupando, se puede escribir:

$$\vec{v}_{21}^{M} = \vec{v}_{01}^{M} + \vec{v}_{20}^{M} = \vec{v}_{21}^{P} + \vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{PM} = \underbrace{\vec{v}_{01}^{P} + \vec{v}_{20}^{P}}_{\vec{v}_{21}^{P}} + (\vec{\omega}_{01} + \vec{\omega}_{20}) \wedge \overrightarrow{PM} \quad \text{(CM\_9)}$$

Como los puntos P y M son cualesquiera del sólido, para que se verifique (CM_9) ha de cumplirse

$$\boxed{\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}} \quad \text{(CM\_10)}$$

Es decir, la expresión para la composición de la velocidad angular es análoga a la de la velocidad lineal. La *velocidad angular absoluta* ($\vec{\omega}_{21}$) es la suma de la *relativa* ($\vec{\omega}_{20}$) y de la de *arrastre* ($\vec{\omega}_{01}$).

3. Composición de aceleraciones

Para obtener la expresión de la composición de las aceleraciones lineales se deriva con respecto al tiempo la expresión (CM_2) obtenida para la composición de velocidades lineales

$$\vec{a}_{21}^{M} = \left.\frac{d\vec{v}_{21}^{M}}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{d(\vec{v}_{01}^{O} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{v}_{20}^{M})}{dt}\right)_{S_1} = \left.\frac{d\vec{v}_{01}^{O}}{dt}\right)_{S_1} + \left.\frac{d(\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt}\right)_{S_1} + \left.\frac{d\vec{v}_{20}^{M}}{dt}\right)_{S_1}$$

Teniendo que

- $\left.\dfrac{d\vec{v}_{01}^{O}}{dt}\right)_{S_1} = \vec{a}_{01}^{O}$ (CM_11)

- $$\left.\frac{d\vec{v}_{20}^{M}}{dt}\right)_{S_1} = \left.\frac{d\vec{v}_{20}^{M}}{dt}\right)_{S_0} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^{M} = \vec{a}_{20}^{M} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^{M} \quad \text{(CM\_12)}$$

- $$\left.\frac{d(\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt}\right)_{S_1} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt}\right)_{S_1}}_{\vec{\alpha}_{01}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{S_1}}_{\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{S_0}}_{\vec{v}_{20}^{M}} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM}} = \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^{M} + \vec{\omega}_{01} \wedge \left(\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

(CM_13)

Sustituyendo y operando se obtiene

$$\vec{a}_{21}^{M} = \vec{a}_{20}^{M} + \vec{a}_{01}^{O} + \vec{\omega}_{01} \wedge \left(\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^{M} \quad \text{(CM\_14)}$$

Análogamente al caso anterior, si se considera S_2 rígidamente unido al S_0 de forma que éste continúa su movimiento arrastrando a S_2, los puntos O y M pertenecientes a este sólido conjunto se relacionan mediante el campo de aceleraciones

$$\vec{a}_{01}^{M} = \vec{a}_{01}^{O} + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM}) \quad \text{(CM\_15)}$$

Así, la expresión de la composión de aceleraciones resulta finalmente

$$\boxed{\vec{a}_{21}^{M} = \vec{a}_{20}^{M} + \vec{a}_{01}^{M} + 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^{M}} \quad \text{(CM\_16)}$$

Expresión que indica que la *aceleración lineal absoluta* ($\vec{a}_{21}^{M}$) es la suma de la *aceleración lineal relativa* ($\vec{a}_{20}^{M}$), de la *aceleración lineal de arrastre* ($\vec{a}_{01}^{M}$) y de otro término complementario denominado *aceleración de coriolis*[4] ($2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^{M}$). Siendo

- $\vec{a}_{21}^{M}$, la aceleración que tiene el punto M del sólido S_2 con respecto de un observador ligado al sólido S_1. Aceleración absoluta del punto M
- $\vec{a}_{20}^{M}$, la aceleración que tiene el punto M del sólido S_2 con respecto de un observador ligado al sólido S_0. Aceleración relativa del punto M
- $\vec{a}_{01}^{M}$, la aceleración que tiene el punto M, ahora considerado del sólido S_0 con respecto de un observador ligado al sólido S_1. Aceleración de arrastre del punto M

[4] Se recomienda ampliar la información sobre el efecto de coriolis
http://axxon.com.ar/rev/139/c-139Divulgacion.htm
http://www.classzone.com/books/earth_science/terc/content/visualizations/es1904/es1904page01.cfm?chapter_no=19
http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/animaciones_files/tiovivo.swf

- $2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^{M}$, término no intuitivo que aparece como consecuencia del proceso de derivaciones que se ha ido realizando. Una mitad de esta aceleración de coriolis proviene del hecho de que la variación con respecto al tiempo de la velocidad relativa no es la misma cuando el observador está situado en S_1 o en S_0 (CM_12). La otra mitad procede del hecho de que la aceleración de arrastre sólo tiene en cuenta la variación de la velocidad de arrastre con respecto al tiempo con el observador ligado al sólido S_1 considerando al punto M perteneciente a S_0, cuando en realidad pertenece a S_2 (CM_13).

En cuanto a la composición de aceleraciones angulares, se deriva con respecto al tiempo la expresión (CM_10)

$$\vec{\alpha}_{21} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt}\right)_{S_1} = \left.\frac{d\left(\vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}\right)}{dt}\right)_{S_1} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt}\right)_{S_1} + \left.\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt}\right)_{S_1}$$

Teniendo en cuenta que

- $$\left.\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt}\right)_{S_1} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt}\right)_{S_0}}_{\vec{\alpha}_{20}} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{20}$$
- $$\left.\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt}\right)_{S_1} = \vec{\alpha}_{01}$$

Se obtiene finalmente

$$\boxed{\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{20}} \quad \text{(CM\_17)}$$

Expresión que indica que la *aceleración angular absoluta* ($\vec{\alpha}_{21}$) es la suma de la *aceleración angular relativa* ($\vec{\alpha}_{20}$), de la *aceleración angular de arrastre* ($\vec{\alpha}_{01}$) y de otro término complementario ($\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{20}$).

4. Movimientos inversos

Conocido el movimiento del sólido S_0 con respecto al sólido S_1 se quiere determinar el movimiento de S_1 con respecto a S_0. Ambos movimientos reciben el nombre de movimientos inversos.

Para ello se considera un tercer sólido S_2 coincidente con S_1 y se aplica la teoría de composición de movimientos. Particularizando para este caso las expresiones (CM_4) y (CM_10) de composición de velocidades se obtiene

$$\vec{v}_{11}^{M} = 0 = \vec{v}_{01}^{M} + \vec{v}_{10}^{M} \Rightarrow \vec{v}_{10}^{M} = -\vec{v}_{01}^{M} \quad \text{(CM\_18)}$$

$$\vec{\omega}_{11} = 0 = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{01} \Rightarrow \vec{\omega}_{10} = -\vec{\omega}_{01} \quad \text{(CM\_19)}$$

Es decir, la velocidades lineales de cualquier punto común a ambos sólidos son iguales y contrarias. También son iguales y contrarias las velocidades angulares.

Análogamente, las expresiones (CM_16) y (CM_17) de la composición de aceleraciones se convierte en

$$\vec{\alpha}_{11} = 0 = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{01} + \underbrace{\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{10}}_{=0,\, son\, ||} \Rightarrow \vec{\alpha}_{10} = -\vec{\alpha}_{01} \quad \text{(CM\_20)}$$

$$\vec{a}_{11}^{M} = 0 = \vec{a}_{10}^{M} + \vec{a}_{01}^{M} \underbrace{-2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{01}^{M}}_{\vec{v}_{10}^{M} = -\vec{v}_{01}^{M}} \Rightarrow \vec{a}_{10}^{M} = -\vec{a}_{01}^{M} + 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{01}^{M} \quad \text{(CM\_21)}$$

Expresiones que indican que las aceleraciones angulares son iguales y contrarias, pero las aceleraciones lineales de puntos coincidentes no, salvo que el término $2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{01}^{M}$ sea nulo. Esto ocurre si:

- $\vec{\omega}_{01} = 0 \Rightarrow$ El movimiento es una traslación
- $\vec{v}_{01}^{M} = 0 \Rightarrow$ El punto M pertenece al *eirmd*, siendo nula la velocidad de mínimo deslizamiento
- $\vec{\omega}_{01} \,||\, \vec{v}_{01}^{M} \Rightarrow$ El punto M pertenece al *eirmd*, siendo $\vec{v}_{01}^{M}$ la velocidad de mínimo deslizamiento

5. Movimiento de sólidos en contacto

Se consideran dos sólidos S_0 y S_1 que se mueven manteniendo en contacto sus superficies exteriores de forma que en todo momento ambas admitan el mismo plano tangente en el punto de contacto M (Figura 2).

A continuación se va a demostrar la condición cinemática que corresponde a esta condición impuesta al movimiento de S_0 con respecto a S_1. Para ello, se va a considerar un tercer sólido S_2 que se mueve de forma que en todo momento coincide con el punto de contacto de los sólidos S_0 y S_1. Con el fin de visualizarlo mejor se puede utilizar el símil del mosquito, así, el sólido S_2 es un mosquito que constantemente se encuentra atrapado en el punto de contacto de ambos sólidos. A lo largo de su movimiento, su trayectoria con respecto a S_0 es una curva C_0 contenida en su superficie, siendo por tanto su velocidad $\vec{v}_{20}^{M}$ con respecto a S_0 tangente a C_0 y contenida en el plano tangente común a S_0 y S_1 en M. Análogamente, su trayectoria con respecto a S_1 es una curva C_1 contenida en su superficie, siendo su velocidad $\vec{v}_{21}^{M}$ tangente a C_1 y contenida también en el plano tangente común a S_0 y S_1 en M.

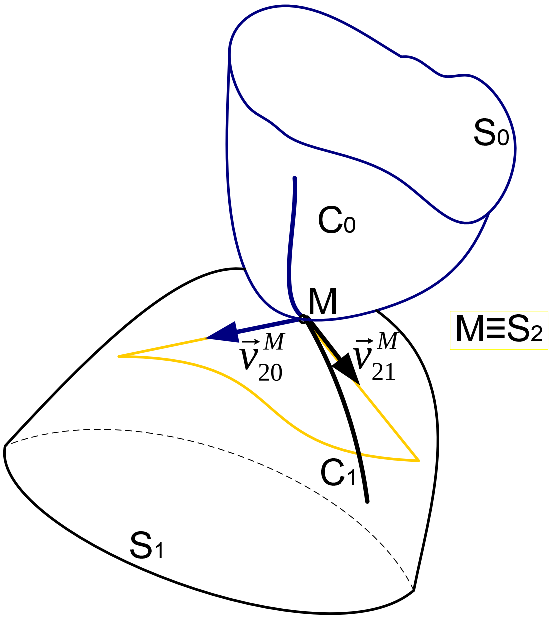

Figura 2: Movimiento de sólidos en contacto

Por composición de movimintos se sabe que

$$\vec{v}_{21}^{M} = \vec{v}_{01}^{M} + \vec{v}_{20}^{M} \Rightarrow \vec{v}_{01}^{M} = \vec{v}_{21}^{M} - \vec{v}_{20}^{M} \quad \text{(CM\_22)}$$

Es decir, cuando dos sólidos se mueven permaneciendo en contacto la velocidad relativa del punto de contacto $\vec{v}_{01}^{M}$ también estará contenida en el plano tangente común, siendo ésta la condición cinemática buscada. A esta velocidad $\vec{v}_{01}^{M}$ se le denomina *velocidad de deslizamiento*[5] entre los dos sólidos.

El movimiento de S_0 con respecto a S_1 viene definido por la velocidad de un punto y la velocidad angular, pero la condición cinemática determinada establece que ambas velocidades no pueden ser fijadas arbitrariamente, sino que han de ser tales que al calcular la velocidad del punto M de contacto, ésta debe estar contenida en el plano tangente común a ambos sólidos.

El movimiento se puede definir con la velocidad del punto M de contacto $\vec{v}_{01}^{M}$, es decir, la *velocidad de deslizamiento*, y la velocidad angular $\vec{\omega}_{01}$. Es costumbre descomponer ésta

[5] No confundir con la velocidad de mínimo deslizamiento. La velocidad relativa del punto de contacto puede ser mínima o no serlo, pero lo que si debe cumplir es que esté contenida en el plano tangente común por el punto de contacto.

última en dos componentes, una perpendicular al plano tangente común denominada *pivotamiento* (ω_p) y otra paralela al plano tangente común denominada *rodadura* (ω_r).

Si la velocidad de deslizamiento es nula se dice que los sólidos ruedan y pivotan sin deslizar, aunque, por simplicidad, habitualmente se emplea que *ruedan sin deslizar*[6], dando por sobreentendido que con ello no se excluye el pivotamiento.

Con objeto de fijar ideas, a continuación se describe gráficamente un caso práctico que se presenta con bastante frecuencia en aplicaciones de ingeniería y, por tanto, en los problemas de cinemática.

Se considera un disco de radio R que se desplaza en línea recta rodando sin deslizar con velocidad angular ω (Figura 3). Utilizando la teoría de composición de movimientos[7], este movimiento se puede estudiar como la composición de una traslación en la que todos los puntos del disco se transladan con la velocidad v del centro O, con la rotación alrededor del centro O del disco con la velocidad angular ω.

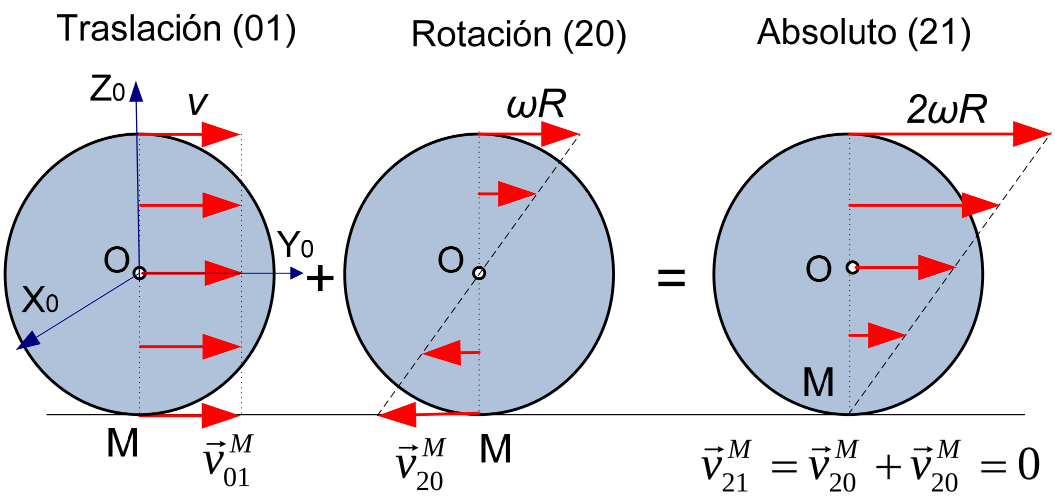

Figura 3: Rodadura sin deslizamiento de un disco

Como el disco no desliza, la velocidad del punto M de contacto en cada instante entre el disco y el suelo es nula. En la figura 3 puede comprobarse que la velocidad de deslizamiento se anula sólo cuando $\omega = v / R$ (que es el caso, por ejemplo, de la rueda de un coche cuando se desplaza por en línea recta[8]). Si $\omega < v / R$, entonces $\vec{v}_{01}^{M} > \vec{v}_{20}^{M}$ y el disco desliza en el sentido de la marcha (por ejemplo, la rueda de un coche cuando

[6] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/rodar/mov_rodar.htm#Movimiento%20de%20rodar%20sin%20deslizar
http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/animaciones_files/rodadura.swf

[7] En este caso, el disco es el sólido S_2, el suelo el sólido S_1 y el intermedio S_0 es un sistema $OX_0Y_0Z_0$ que acompaña al centro O del disco.

[8] En este caso, la rueda es el sólido S_2, el pavimento el sólido S_1 y el intermedio S_0 es el eje del coche en el que está anclada la rueda

frena sobre un pavimento deslizante). Sin embargo, si $\omega > v / R$, entonces $\vec{v}_{01}^{M} < \vec{v}_{20}^{M}$ y el disco también desliza pero en el sentido contrario al de la marcha (ahora sería, por ejemplo, la rueda de un coche patinando al tratar de abandonar un suelo arenoso).

6. Bibliografía

- Prieto Alberca, M. (1990), *Curso de Mecánica Racional: Cinemática y Estática*, ADI, Madrid